Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

AM110 - Analisi Matematica 1- Tutorato I

DOCENTE: PROF. PIERPAOLO ESPOSITO

TUTORI: A. MAZZOCCOLI, M. NANNI

ESERCIZIO 1. Si trovino, qualora esistano, Sup e Inf su $\mathbb{R}$ dei seguenti insiemi, specificando ove necessario se essi sono Max o Min.

a) $\left\{n - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ b) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ c) $\left\{n^2 + 3n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

d) $\left\{\frac{3n - |sen(n)|}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ e) $\left\{x^2 \leqslant 2 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ f) $\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}$, $(-\infty, 5]$, $(-2, +\infty)$

g) $\left\{2n + \frac{3}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$ h) $\left\{x^2 - y^2 \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$ i) $\left\{xy \mid x \in [-1, 2] \wedge y \in [-3, -1)\right\}$

ESERCIZIO 2. Si provino per induzione i seguenti risultati:

- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $n! > 2^n \quad \forall\, n \geqslant 4$
- $n^n > n! \quad \forall\, n \geqslant 2$

ESERCIZIO 3. Si provi che ogni numero naturale $n \geqslant 2$ è prodotto di numeri primi.

ESERCIZIO 4. Usando la formula del Binomio di Newton e/o il Triangolo di Tartaglia, si calcoli esplicitamente l'espressione:

$$(3x - 2y)^n \qquad con \quad n = 4, 5, 6$$

ESERCIZIO 5. In una pasticceria del centro vengono prodotti 20 tipi di mignon diversi, ma possono essere esposti solo 4 vassoi alla volta, ognuno contenente un gusto solo. Con quante combinazioni di gusti i pasticceri possono attirare i clienti? (Si pensi al significato del binomio di Newton).

ESERCIZIO 6. Dando per buono che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ si provi usando la stessa tecnica che $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n}$ è necessariamente un numero intero o un numero irrazionale. Deducendone che solo un quadrato perfetto sotto radice è un numero intero (e quindi razionale), si provi che $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{4n-1} \notin \mathbb{Q}$.

ESERCIZIO 7. Si provino le seguenti diseguaglianze in modulo:

a) $2x + |x-3| \geqslant 0$ *b)* $\frac{x^2 - 2x + 1}{|x+1|} < 0$ *c)* $\left|\frac{5-x}{x+3}\right| \geqslant 1$ *d)* $|x^2 + x - 2| \leqslant 2|x-1|$

Esercizio 8. Si provi per induzione:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

e successivamente usare il risultato ottenuto per dare una dimostrazione alternativa di:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad con \quad q \neq 1$$

Esercizio 9. Per allenarsi ancora sul principio di induzione:

$$a) \quad cos(n\pi) = (-1)^n \qquad b) \quad \prod_{k=1}^{n} 2(2k-1) = \frac{(2n)!}{n!}$$

$$c) \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Che relazione c'è fra quest'ultima espressione e le somme sui primi n interi di Gauss?